

© Ченцов А.Г., 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-182-215

УДК 519.6



Максимальные сцепленные системы на произведениях широко понимаемых измеримых пространств

Александр Георгиевич ЧЕНЦОВ

ФГБУН «Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского»

Уральского отделения Российской академии наук

620108, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16

ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина»

620002, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19

Maximal linked systems on products of widely understood measurable spaces

Aleksandr G. CHENTSOV

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics

of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences

16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620108, Russian Federation

Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin

19 Mira St., Yekaterinburg 620002, Russian Federation

Аннотация. Рассматриваются максимальные сцепленные системы (МСС) множеств на широко понимаемых измеримых пространствах (ИП), получаемых каждое посредством оснащения непустого множества π -системой его подмножеств с «нулем» и «единицей» (π -система — непустое семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Исследуются конструкции произведения упомянутых ИП, связываемые с двумя вариантами измеримых (в широком смысле) прямоугольников. Семейства МСС на каждом из множеств, участвующих в построении произведения оснащаются топологиями стоуновского типа. Исследуется связь получающихся топологических пространств, реализуемых, соответственно, в ящичном и тихоновском вариантах, и соответствующего (каждому варианту) топологического пространства стоуновского типа на множестве МСС с измеримой структурой в виде π -системы измеримых прямоугольников. Получены свойства уплотняемости (для «ящичного» варианта) и гомеоморфности (в случае использования тихоновского произведения) для получающихся топологических пространств.

Ключевые слова: максимальная сцепленная система, тихоновское произведение, ящичная топология

Благодарности: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00371_а).

Для цитирования: Ченцов А.Г. Максимальные сцепленные системы на произведениях широко понимаемых измеримых пространств // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 182–215. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-182-215.

Abstract. Maximal linked systems (MLS) of sets on widely understood measurable spaces (MS) are considered; in addition, every such MS is realized by equipment of a nonempty set with a π -system of its subsets with «zero» and «unit» (π -system is a nonempty family of sets closed with respect to finite intersections). Constructions of the MS product connected with two variants of measurable (in wide sense) rectangles are investigated. Families of MLS

are equipped with topologies of the Stone type. The connection of product of above-mentioned topologies considered for box and Tychonoff variants and the corresponding (to every variant) topology of the Stone type on the MLS set for the MS product is studied. The properties of condensation and homeomorphism for resulting variants of topological equipment are obtained.

Keywords: maximal linked system, Tychonoff product, box-topology

Mathematics Subject Classification: 54A10, 54B05

Acknowledgements: The work is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00371_a).

For citation: Chentsov A.G. Maksimal'nyye stseplennyye sistemy na proizvedeniyakh shiroko ponimayemykh izmerimyykh prostranstv [Maximal linked systems on products of widely understood measurable spaces]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 182–215. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-182-215. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

При исследовании ультрафильтров ($у/ф$) широко понимаемых измеримых пространств (ИП) весьма полезным оказывается изучение более общих структур, реализуемых в классе максимальных сцепленных систем (МСС). При этом само ИП получается посредством оснащения непустого множества π -системой [1, с. 14] его подмножеств ($п/м$), определяемой в виде непустого семейства множеств, замкнутого относительно конечных пересечений; мы рассматриваем далее только π -системы с «нулем» и «единицей» (пустое и объемлющее множества). Определяя сцепленность традиционно (см. [2–4], [5, гл. VII, § 4], а также [6, 5.11]), мы рассматриваем сцепленные подсемейства π -системы и среди них выделяем максимальные, которые и называем МСС. Среди МСС содержатся $у/ф$ π -системы, но возможны и МСС, которые $у/ф$ не являются (собственные МСС). Множество $у/ф$ и множество МСС (на данной π -системе) допускают оснащение парой сравнимых топологий, отвечающих содержательно схемам Волмэна и Стоуна. Реализуются два битопологических пространства, причем пространство $у/ф$ может рассматриваться как подпространство пространства МСС (см. [7–12] и др.). Пространство МСС с топологией волмэновского типа суперкомпактно (см. [8, 9]). В настоящем исследовании, однако, используется только топология стоуновского типа и мы ограничимся сейчас обсуждением этой топологии.

Для теории и приложений важна операция, связанная с построением произведения ИП (см., например, [13, гл. III]), на первом и ключевом этапе которой реализуются измеримые прямоугольники. Имея в виду этот этап, само понятие измеримости (прямоугольников) может быть обобщено: мы рассматриваем произведение π -систем; при таком подходе мы можем с единых позиций рассматривать измеримые в традиционном смысле (см. [13, гл. III]) и открытые (в случае произведения ТП) прямоугольники. В общем случае в виде произведения π -систем пространств-сомножителей реализуется π -система множества-произведения, на которой определяются МСС, которые исчерпываются [14] произведениями МСС на пространствах-сомножителях; простейший вариант данного положения см. в [15, § 7]. Более общие варианты соответствуют [16, (6.4), (6.5)], где используется аппарат обобщенных декартовых произведений [17, гл. IV, § 6]. Аналоги данных построений применялись в [18], где исследовались бесконечные, вообще говоря, произведения $у/ф$, что делает естественным аналогичное исследование в случае МСС. Возникает вопрос о соотношении естественных топологических структур: произведения

«стоуновских» топологий на пространствах-сомножителях и «стоуновской» топологии на пространстве-произведении. Рассмотрим, в частности, вариант, когда в первом случае реализуется ящичное пространство, а, точнее, обобщенное декартово произведение с ящичной топологией [19, с. 148]. Множество-произведение оснащаем топологией стоуновского типа. Показано, что естественное отображение, сопоставляющее параметризованному семейству МСС на пространствах-сомножителях соответствующую МСС на π -системе обобщенного декартова произведения, является уплотнением [19, с. 382], т. е. непрерывной биекцией.

Второй вариант, рассматриваемый в работе, отвечает случаю, когда используется тихоновское произведение «стоуновских» пространств. В этом случае конструкция, подобная идейно вышеупомянутой схеме, приводит к гомеоморфизму (имеется в виду ситуация, когда π -система на обобщенном декартовом произведении конструируется по аналогии с канонической базой тихоновского произведения).

1. Общие обозначения и определения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связи и др.); $\triangleq$ — равенство по определению, $\emptyset$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Для любых двух объектов x и y через $\{x; y\}$ обозначаем (см. [17, с. 16]) их неупорядоченную пару, т. е. множество, содержащее в виде своих элементов x , y и не содержащее никаких других элементов. Для произвольного объекта z в виде $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ имеем синглетон (одноэлементное множество), содержащий z : $z \in \{z\}$. Множества являются объектами. С учетом этого для любых двух объектов g и h , следуя [17, с. 67], полагаем, что $(g, h) \triangleq \{\{g\}; \{g; h\}\}$, получая упорядоченную пару с первым элементом g и вторым элементом h . Для любых трех объектов x , y и z полагаем, как обычно, $\{x; y; z\} \triangleq \{x; y\} \cup \{z\}$; в соответствии с этим для любых трех множеств A , B и C полагается, что $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$.

Каждому множеству H сопоставляем семейство $\mathcal{P}(H)$ всех п/м H и полагаем, что $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$; наконец, через $\text{Fin}(H)$ обозначаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H . Если $\mathbb{M}$ — множество, а $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{ \mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M} \} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$$

есть семейство п/м $\mathbb{M}$, двойственное к $\mathcal{M}$. Непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляется след $\mathcal{A}|_B \triangleq \{ A \cap B : A \in \mathcal{A} \} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ данного семейства на B . Непустому семейству $\mathfrak{X}$ сопоставляем семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X})$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$, $\{\cup\}_{\#}(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_{\#}(\mathfrak{X})$, определяемые в [8, раздел 2] (семейства всех объединений подсемейств $\mathfrak{X}$, пересечений непустых подсемейств $\mathfrak{X}$, конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$).

Если A и B — множества, то (см. [17, гл. II, § 6]) через B^A обозначаем множество всех отображений (функций) из A в B ; при $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ полагаем $g^1(C) \triangleq \{ g(x) : x \in C \}$ (образ множества C при действии g); ясно, что $g^1(C) \in \mathcal{P}(B)$.

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; если $n \in \mathbb{N}$, то $\overline{1, n} \triangleq \{ k \in \mathbb{N} | k \leq n \} \in \mathcal{P}'(\mathbb{N})$. Полагая, что элементы $\mathbb{N}$ не являются множествами, далее для любых множества H и числа $k \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1, k}}$ используем H^k для обозначения

множества всех отображений из $\overline{1, k}$ в H ; итак, H^k — множество всех кортежей в H , имеющих «длину» k . Если $\mathcal{H}$ — семейство и $k \in \mathbb{N}$, то в виде $(H_i)_{i \in \overline{1, k}} \in \mathcal{H}^k$ реализуется кортеж множеств. Если T — произвольное множество, то полагаем, что

$$(\text{Fam})[T] \triangleq \{ \mathcal{T} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(T)) \mid T \in \mathcal{T} \}; \quad (1.1)$$

элементы $(\text{Fam})[T]$ (1.1) — суть семейства п/м T с «единицей» (множество T) и только они. Условимся о некоторых специальных обозначениях, связанных с обобщенными декартовыми произведениями, фиксируя для краткости непустые множества X и Y , а также (множественнозначное) отображение $(Y_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(Y)^X$. Тогда

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{Y}_x \triangleq \{ \prod_{x \in X} \mathbb{Y}_x : (\mathbb{Y}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{Y}_x \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\prod_{x \in X} Y_x)) \quad \forall (\mathcal{Y}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y_x)) \}. \quad (1.2)$$

Элементы семейств (1.2) именуем в настоящем исследовании прямоугольниками. Полагаем также с учетом (1.1), что

$$\begin{aligned} \bigotimes_{x \in X} \mathcal{F}_x \triangleq \{ H \in \mathcal{P}(\prod_{x \in X} Y_x) \mid \exists (\mathbb{F}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{F}_x : (H = \prod_{x \in X} \mathbb{F}_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \\ \mathbb{F}_s = Y_s \quad \forall s \in X \setminus K) \} \quad \forall (\mathcal{F}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\text{Fam})[Y_x]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В дальнейшем множество X фиксируется, а Y и $(Y_x)_{x \in X}$ будут варьироваться.

Если $\mathcal{H}$ — семейство, а S — множество, то полагаем, что $[\mathcal{H}](S) \triangleq \{ H \in \mathcal{H} \mid S \subset H \}$.

2. Сцепленные системы на широко понимаемом измеримом пространстве

Введем в рассмотрение π -системы [1, с. 14], фиксируя в настоящем разделе непустое множество E . В виде

$$\pi[E] \triangleq \{ \mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \mid (\emptyset \in \mathcal{L}) \& (E \in \mathcal{L}) \& (A \cap B \in \mathcal{L} \quad \forall A \in \mathcal{L} \quad \forall B \in \mathcal{L}) \} \quad (2.1)$$

имеем семейство всех π -систем п/м E с «нулем» и «единицей»; $\mathcal{P}(E) \in \pi[E]$. Если $\mathcal{L} \in \pi[E]$, то пару $(E, \mathcal{L})$ рассматриваем как (широко понимаемое) измеримое пространство (ИП). Заметим, что $\pi[E] \subset (\text{Fam})[E]$. Алгебры и полуалгебры п/м E , топологии на E и семейства замкнутых множеств в топологических пространствах (ТП) с «единицей» E являются π -системами из семейства (2.1). Сейчас укажем только, что

$$(\text{top})[E] \triangleq \{ \tau \in \pi[E] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \quad \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \} = \{ \tau \in \pi[E] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \quad \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}(\tau) \} \in \mathcal{P}'(\pi[E])$$

есть семейство всех топологий на E . Отметим, что обозначения $(\text{BAS})[E]$ и $(\text{p-BAS})[E]$ соответствуют [9, раздел 2] (семейства всех открытых баз и предбаз топологий на E соответственно); при этом $\{\cup\}(\beta) \in (\text{top})[E] \quad \forall \beta \in (\text{BAS})[E]$. Кроме того, $\{\cap\}_\#(\kappa) \in (\text{BAS})[E] \quad \forall \kappa \in (\text{p-BAS})[E]$. В итоге

$$\{\cup\}(\{\cap\}_\#(\kappa)) \in (\text{top})[E] \quad \forall \kappa \in (\text{p-BAS})[E].$$

Если $\tau \in (\text{top})[E]$, то $(\tau - \text{BAS})_0[E] \triangleq \{ \beta \in (\text{BAS})[E] \mid \tau = \{\cup\}(\beta) \}$ и, кроме того,

$$(\text{p-BAS})_0[E; \tau] \triangleq \{ \kappa \in (\text{p-BAS})[E] \mid \{\cap\}_\#(\kappa) \in (\tau - \text{BAS})_0[E] \}.$$

Сцепленность. Если $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то имеем в виде

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \triangleq \{ \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E} \} \quad (2.2)$$

семейство всех непустых сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$, называемых также сцепленными системами (на $\mathcal{L}$), а в виде

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \triangleq \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \ (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \implies (\mathcal{E} = \mathcal{S}) \} \quad (2.3)$$

семейство всех МСС на $\mathcal{L}$. Общие свойства семейств (2.2), (2.3) см. в [20]. Для всех наших последующих целей достаточен случай $\mathcal{L} \in \pi[E]$, которым мы и ограничиваемся в дальнейшем. Итак, полагаем до конца настоящего и в следующем разделе, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Отметим, что

$$\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ (L \cap \Sigma \neq \emptyset \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \implies (L \in \mathcal{E}) \}. \quad (2.4)$$

Далее отметим следующее очевидное свойство: $[\mathcal{L}](\Sigma) \subset \mathcal{E} \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$. Наконец, $E \in \mathcal{E} \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]$.

3. Топология стоуновского типа на множестве максимальных сцепленных систем

В настоящем разделе фиксируем непустое множество E и π -систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$. Тогда в виде (2.4) имеем непустое множество (см. [8–11]). Следуя [8, раздел 4], введем при $L \in \mathcal{L}$ множество

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|L] &\triangleq \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E} \} \\ &= \{ \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] \mid L \cap \Sigma \neq \emptyset \ \forall \Sigma \in \mathcal{E} \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

(см. [8, предложение 6.2]). С учетом [8, (4.9)] получаем следующее непустое семейство:

$$\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \triangleq \{ \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|L] : L \in \mathcal{L} \} \in (\text{p-BAS})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]] \quad (3.2)$$

(заметим, что $\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E] = \langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle^0[E|E] \in \hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]$), а, точнее, открытую предбазу. Тогда $\{\cap\}_\#(\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]) \in (\text{BAS})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]]$ и при этом

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle \triangleq \{\cup\}(\{\cap\}_\#(\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}])) \in (\text{top})[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]]. \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что $\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle$. Напомним, что

$$(\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle) \quad (3.4)$$

есть нульмерное T_2 -пространство (см. [8, раздел 6]). При этом, конечно, имеем (см. (3.3)) свойство

$$\hat{\mathcal{C}}_0^*[E; \mathcal{L}] \in (\text{p-BAS})_0[\langle \mathcal{L} - \text{link} \rangle_0[E]; \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L} \rangle], \quad (3.5)$$

т. е. ТП (3.4) порождается предбазой (3.2). В дальнейшем ИП $(E, \mathcal{L})$ будет конкретизироваться, исходя из потребностей соответствующих рассуждений.

4. Ящичное произведение π -систем

Всюду в дальнейшем фиксируем непустые множества X и $\mathbf{E}$, а также отображение $(E_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$; итак, при $x \in X$ в виде E_x имеем непустое п/м $\mathbf{E}$. Получаем (с использованием аксиомы выбора), что

$$\mathbb{E} \triangleq \prod_{x \in X} E_x = \{ f \in \mathbf{E}^X \mid f(x) \in E_x \ \forall x \in X \} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E}^X).$$

Множество $\mathbb{E}$ рассматриваем в качестве «единицы» пространства-произведения. Наконец, фиксируем далее

$$(\mathcal{L}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \pi[E_x];$$

итак, $\mathcal{L}_x \in \pi[E_x] \ \forall x \in X$. С учетом (1.2) получаем (см. [16, (6.5)]), что

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x = \{ \prod_{x \in X} L_x : (L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x \} \in \pi[\mathbb{E}]; \quad (4.1)$$

назовем π -систему (4.1) ящичным произведением π -систем $\mathcal{L}_x$, $x \in X$. Напомним, что (см. (1.2); [14, предложение 3.6]) при $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x = \{ \prod_{x \in X} \Sigma_x : (\Sigma_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{E}_x \} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]. \quad (4.2)$$

Более того, согласно [14, теорема 3.1] имеем следующее равенство

$$\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}] = \{ \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x : (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \}. \quad (4.3)$$

Заметим, что $\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$ есть непустое множество и отображение

$$\mathbf{f} \triangleq (\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x)_{(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]^{\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]} \quad (4.4)$$

является сюръекцией. Для дальнейшего существенны положения [14, раздел 3], которые сейчас напомним совсем кратко. Так (см. [14, (3.11), (3.12)]) на непустом семействе $(\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\emptyset\}$ определен оператор

$$\mathbf{P} : (\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \prod_{x \in X} \mathcal{P}'(E_x) \quad (4.5)$$

посредством следующего правила: если $H \in (\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\emptyset\}$, то множественнозначное отображение $\mathbf{P}(H) \in \prod_{x \in X} \mathcal{P}'(E_x)$ таково, что

$$H = \prod_{\chi \in X} \mathbf{P}(H)(\chi). \quad (4.6)$$

Если $(\Sigma_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{P}'(E_x)$, то $\prod_{x \in X} \Sigma_x \in (\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\emptyset\}$ и при $\kappa \in X$

$$\Sigma_\kappa = \mathbf{P}(\prod_{x \in X} \Sigma_x)(\kappa). \quad (4.7)$$

В связи с (4.6), (4.7) напомним [14, (3.16), (3.17)]. Введем в рассмотрение операторы [14, (3.17), (3.18)]. Итак, при $\chi \in X$ полагаем, что

$$\mathbf{P}_\chi : (\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow \mathcal{P}'(E_\chi) \quad (4.8)$$

определяется следующим правилом: если $H \in (\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\emptyset\}$, то

$$\mathbf{P}_\chi(H) \triangleq \mathbf{P}(H)(\chi).$$

Легко видеть, что при $\chi \in X$ и $(\Sigma_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{P}'(E_x)$ непременно

$$\mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} \Sigma_x) = \Sigma_\chi.$$

Тогда, в частности, имеем при $\chi \in X$ и $(L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\})$

$$\mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} L_x) = L_\chi. \quad (4.9)$$

Напомним свойства [14, (3.20), (3.21)]. Сейчас отметим только одно очевидное следствие:

$$\Lambda = \prod_{\chi \in X} \mathbf{P}_\chi(\Lambda) \quad \forall \Lambda \in (\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\emptyset\}. \quad (4.10)$$

В этой связи укажем одно очевидное общее свойство: если M — непустое множество и $\mathcal{M} \in \pi[M]$, то

$$\langle \mathcal{M} - \text{link} \rangle[M] \subset \mathcal{P}(\mathcal{M} \setminus \{\emptyset\}).$$

С учетом (4.8) получаем, что при $\mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigodot_{x \in X} \mathcal{P}(E_x)) \setminus \{\emptyset\})$ и $\chi \in X$

$$\mathbf{P}_\chi^1(\mathcal{H}) \triangleq (\mathbf{P}_\chi)^1(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(E_\chi)). \quad (4.11)$$

Свойства (4.10), (4.11) существенны в дальнейшем. Легко видеть, что (см. (4.11); [14, (3.16)])

$$\mathbf{P}_\chi^1(\mathcal{H}) \in \mathcal{P}(\mathcal{L}_\chi \setminus \{\emptyset\}) \quad \forall \mathcal{H} \in \mathcal{P}((\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\emptyset\}).$$

Для наших целей существенно то, что (см. [14, предложение 3.5])

$$\mathbf{P}_\chi^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link} \rangle_0[E_\chi] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}] \quad \forall \chi \in X. \quad (4.12)$$

В свою очередь, из (4.12) вытекает (см. (4.2)), что

$$(\mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]. \quad (4.13)$$

Заметим, что в силу (4.2) и (4.13) корректно следующее построение: если $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$, то

$$(\mathbf{P}_\chi^1(\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x))_{\chi \in X} \in \prod_{\chi \in X} \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link} \rangle_0[E_\chi].$$

Предложение 4.1. Если $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$, то справедливо равенство

$$(\mathcal{E}_x)_{x \in X} = (\mathbf{P}_\chi^1(\bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x))_{\chi \in X}.$$

Доказательство. Фиксируем параметризованное семейство

$$(\mathcal{T}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]. \quad (4.14)$$

Тогда, как легко видеть, определено множество-произведение

$$\prod_{x \in X} \mathcal{T}_x = \{ (L_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X \mid L_\chi \in \mathcal{T}_\chi \ \forall \chi \in X \}$$

и при этом справедливо следующее равенство:

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x = \{ \prod_{x \in X} L_x : (L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{T}_x \}.$$

Заметим, что $\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]$ и, в частности,

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x \subset (\bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\emptyset\}.$$

Учтем тот легкопроверяемый факт, что $\forall (A_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\}) \ \forall (B_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\})$

$$(\prod_{x \in X} A_x = \prod_{x \in X} B_x) \implies ((A_x)_{x \in X} = (B_x)_{x \in X}). \quad (4.15)$$

Здесь же отметим, что в силу (4.9) при $(L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\})$

$$(\mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} L_x))_{\chi \in X} = (L_x)_{x \in X}. \quad (4.16)$$

Кроме того, $\mathcal{T}_\kappa \in \langle \mathcal{L}_\kappa - \text{link} \rangle_0[E_\kappa]$ и, следовательно, $\mathcal{T}_\kappa \subset \mathcal{L}_\kappa \setminus \{\emptyset\}$ при $\kappa \in X$. Поэтому $\prod_{x \in X} \mathcal{T}_x \subset \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\})$ и (4.16) справедливо при $(L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{T}_x$. Кроме того, определено отображение

$$(\mathbf{P}_\chi^1(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x))_{\chi \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x].$$

Отметим в связи с (4.15) следующую очевидную эквиваленцию

$$((\mathcal{T}_x)_{x \in X} = (\mathbf{P}_\chi^1(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x))_{\chi \in X}) \iff (\mathcal{T}_\kappa = \mathbf{P}_\kappa^1(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x) \ \forall \kappa \in X). \quad (4.17)$$

Выберем произвольно $u \in X$. Тогда $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{L}_u \setminus \{\emptyset\}$, где согласно (4.9)

$$\mathbf{P}_u(\prod_{x \in X} \Sigma_x) = \Sigma_u \ \forall (\Sigma_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\}). \quad (4.18)$$

Выберем произвольно $\mathbb{T} \in \mathcal{T}_u$, после чего введем в рассмотрение отображение $(T_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$ по правилу

$$(T_u \triangleq \mathbb{T}) \& (T_x \triangleq E_x \quad \forall x \in X \setminus \{u\})$$

(учитываем очевидное свойство $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{L}_u \setminus \{\emptyset\}$). Ясно, что $(T_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{T}_x$ (см. раздел 2), а потому

$$\prod_{x \in X} T_x \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x. \quad (4.19)$$

Ясно также, что $(T_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\})$, а тогда в силу (4.18)

$$\mathbf{P}_u\left(\prod_{x \in X} T_x\right) = T_u = \mathbb{T}, \quad (4.20)$$

где согласно (4.19) имеет место свойство

$$\mathbf{P}_u\left(\prod_{x \in X} T_x\right) \in \mathbf{P}_u^1\left(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x\right)$$

по определению образа множества. Поэтому с учетом (4.20) получаем включение

$$\mathbb{T} \in \mathbf{P}_u^1\left(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x\right).$$

Таким образом, установлено (поскольку выбор $\mathbb{T}$ был произвольным) следующее вложение:

$$\mathcal{T}_u \subset \mathbf{P}_u^1\left(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x\right). \quad (4.21)$$

Пусть $\Lambda \in \mathbf{P}_u^1\left(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x\right)$. Тогда $\Lambda \in \mathcal{P}'(E_u)$ и

$$\Lambda = \mathbf{P}_u(\Omega),$$

где $\Omega \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x$. При этом для некоторого отображения $(\Omega_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{T}_x$ реализуется равенство

$$\Omega = \prod_{x \in X} \Omega_x, \quad (4.22)$$

где $\Omega_x \in \mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\}$ при $x \in X$. Тогда $(\Omega_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\})$. Но в этом случае (см. (4.18), (4.22))

$$\Lambda = \mathbf{P}_u(\Omega) = \mathbf{P}_u\left(\prod_{x \in X} \Omega_x\right) = \Omega_u \in \mathcal{T}_u \quad (4.23)$$

по выбору $(\Omega_x)_{x \in X}$. Итак, установлено (см. (4.23)) свойство

$$\mathbf{P}_u^1\left(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x\right) \subset \mathcal{T}_u,$$

чем и завершается (см. (4.21)) проверка равенства

$$\mathcal{T}_u = \mathbf{P}_u^1\left(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x\right).$$

Поскольку выбор $u \in X$ был произвольным, установлено (см. (4.17)) требуемое равенство

$$(\mathcal{T}_x)_{x \in X} = (\mathbf{P}_\chi^1(\bigodot_{x \in X} \mathcal{T}_x))_{\chi \in X}.$$

Коль скоро и выбор (4.14) был произвольным, предложение полностью доказано. $\square$

Предложение 4.2. Если $(L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$, то справедливо равенство

$$\{(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \mid \prod_{x \in X} L_x \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x\} = \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | L_x].$$

Доказательство следует из определений.

Возвращаясь к (4.4), отметим теперь следующее

Предложение 4.3. Если $(L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$, то

$$\mathbf{f}^{-1}(\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E} \mid \prod_{x \in X} L_x]) = \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | L_x]. \quad (4.24)$$

Доказательство. Фиксируем $(L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$. Напомним, что (см. (4.1))

$\prod_{x \in X} L_x \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x$ и при этом (см. (3.1))

$$\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E} \mid \prod_{x \in X} L_x] = \{ \mathcal{E} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}] \mid \prod_{x \in X} L_x \in \mathcal{E} \}. \quad (4.25)$$

Далее, в силу предложения 4.2 имеем следующую цепочку равенств

$$\Omega \triangleq \{ (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \mid \prod_{x \in X} L_x \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{E}_x \} = \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | L_x]. \quad (4.26)$$

Пусть $(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \mathbf{f}^{-1}(\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E} \mid \prod_{x \in X} L_x])$. Тогда $\mathcal{U}_\chi \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link} \rangle_0[E_\chi]$ при $\chi \in X$ и определена (см. (4.2)) МСС

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{U}_x = \{ \prod_{x \in X} \Sigma_x : (\Sigma_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{U}_x \} \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}].$$

При этом $\mathbf{f}((\mathcal{U}_x)_{x \in X}) = \bigodot_{x \in X} \mathcal{U}_x \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E} \mid \prod_{x \in X} L_x]$. Тогда (см. (4.25))

$$\prod_{x \in X} L_x \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{U}_x,$$

а потому согласно (4.26) $(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \Omega$ и, следовательно, имеем включение

$$(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | L_x].$$

Итак, установлено следующее свойство:

$$\mathbf{f}^{-1}(\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E} \mid \prod_{x \in X} L_x]) \subset \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | L_x]. \quad (4.27)$$

Выберем произвольно отображение $(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0^0[E_x | L_x]$. Тогда

$$(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]. \quad (4.28)$$

При этом согласно (3.1) $L_x \in \mathcal{V}_x \ \forall x \in X$. Отметим, что определено произведение семейств

$$\prod_{x \in X} \mathcal{V}_x = \{(\Sigma_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X \mid \Sigma_\chi \in \mathcal{V}_\chi \ \forall \chi \in X\}.$$

Поэтому $(L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{V}_x$, откуда следует (см. (4.2), (4.28)), что

$$\prod_{x \in X} L_x \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{V}_x, \quad (4.29)$$

где $\bigodot_{x \in X} \mathcal{V}_x \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]$. Теперь из (3.1) и (4.29) получаем, что

$$\mathbf{f}((\mathcal{V}_x)_{x \in X}) = \bigodot_{x \in X} \mathcal{V}_x \in \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0^0[\mathbb{E} \mid \prod_{x \in X} L_x].$$

Последнее означает, что $(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \mathbf{f}^{-1}(\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0^0[\mathbb{E} \mid \prod_{x \in X} L_x])$, чем и завершается проверка вложения

$$\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0^0[E_x | L_x] \subset \mathbf{f}^{-1}(\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0^0[\mathbb{E} \mid \prod_{x \in X} L_x]).$$

С учетом (4.27) получаем требуемое равенство (4.24). $\square$

Отметим, что (см. (3.2)) определено следующее множество-произведение

$$\prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] = \{(\mathbb{H}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X \mid \mathbb{H}_\chi \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_\chi; \mathcal{L}_\chi] \ \forall \chi \in X\}. \quad (4.30)$$

С учетом (4.30) получаем при $(\mathbb{H}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$, что определено также

$$\prod_{x \in X} \mathbb{H}_x = \{(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X \mid \mathcal{E}_\chi \in \mathbb{H}_\chi \ \forall \chi \in X\}.$$

Тогда в соответствии с (1.2) имеем следующее семейство

$$\bigodot_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] = \{ \prod_{x \in X} \mathbb{H}_x : (\mathbb{H}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x])) \}, \quad (4.31)$$

т. е. (4.31) есть непустое подсемейство $\mathcal{P}(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x])$. С другой стороны, в соответствии с (3.2) определена предбаза

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x] = \{ \langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0^0[\mathbb{E} | L] : L \in \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x \in (\text{p-BAS})[\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]] \}. \quad (4.32)$$

Из предложения 4.3 и (4.32) вытекает, что справедливо следующее свойство

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H}) \in \bigodot_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \ \forall \mathbb{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x]. \quad (4.33)$$

5. Связь ящичной топологии и топологии стоуновского типа на обобщенном декартовом произведении

Мы располагаем системой ТП $(\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x], \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle)$, $x \in X$, и ТП

$$(\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}], \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} | \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle).$$

Упомянутой системе можно сопоставить ящичную топологию [19] на обобщенном декартовом произведении. Совсем кратко охарактеризуем ее структуру. Итак,

$$(\mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\text{top})[\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]]. \quad (5.1)$$

С учетом этого определено семейство-произведение

$$\prod_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle = \{ (\mathbb{G}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X | \mathbb{G}_\chi \in \mathbb{T}_* \langle E_\chi | \mathcal{L}_\chi \rangle \ \forall \chi \in X \}.$$

В этой связи отметим также, что при $(\mathbb{G}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle$ определено

$$\prod_{x \in X} \mathbb{G}_x = \{ (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X | \mathcal{E}_\chi \in \mathbb{G}_\chi \ \forall \chi \in X \}.$$

Наконец, следуя (1.2), получаем открытую базу

$$\bigodot_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle = \{ \prod_{x \in X} \mathbb{G}_x : (\mathbb{G}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \} \in (\text{BAS})[\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]] \quad (5.2)$$

(см. (5.1) и определение канонической базы ящичной топологии в [19, с.148]). Тогда (см. (5.1), (5.2))

$$\mathbf{t}_\odot \triangleq \{ \cup \} (\bigodot_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle) \in (\text{top})[\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]] \quad (5.3)$$

есть ящичная топология, отвечающая семейству «стоуновских» топологий пространств-сомножителей. Мы получили ящичное пространство

$$(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x], \mathbf{t}_\odot) \quad (5.4)$$

а также «стоуновское» ТП, отвечающее ящичному произведению π -систем, т. е.

$$(\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}], \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} | \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle). \quad (5.5)$$

Напомним в этой связи, что (см. [8, (6.1)]) $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \subset \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle$ при $x \in X$. Поэтому (см. (5.3)), как легко видеть,

$$\bigodot_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \subset \bigodot_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \subset \mathbf{t}_\odot. \quad (5.6)$$

Предложение 5.1. *Отображение $\mathbf{f}$ (4.4) непрерывно в смысле топологий $\mathbf{t}_\odot$ и $\mathbb{T}_*\langle \mathbb{E} | \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle$.*

Доказательство. Согласно (3.5) и (4.1) имеем свойство

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x] \in (\mathbf{p} - \mathbf{BAS})_0[\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]; \mathbb{T}_*\langle \mathbb{E} | \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle]. \quad (5.7)$$

Далее, из (4.33) и (5.6) вытекает следующее свойство

$$\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{H}) \in \mathbf{t}_\odot \quad \forall \mathbb{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x]. \quad (5.8)$$

Из (5.7) и (5.8) вытекает (см. [21, предложение 1.4.1]) требуемое свойство непрерывности. $\square$

Предложение 5.2. *Отображение $\mathbf{f}$ (4.4) является биекцией множества $\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$ на $\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]$.*

Доказательство. Напомним сначала, что $\mathbf{f}$ – сюръекция $\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$ на $\langle \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]$; см. (4.3), (4.4). Проверим свойство инъективности, фиксируя $(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$ и $(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$, со свойством

$$\mathbf{f}((\mathcal{U}_x)_{x \in X}) = \mathbf{f}((\mathcal{V}_x)_{x \in X}). \quad (5.9)$$

Иными словами (см. (4.4), (5.9)), справедливо следующее равенство:

$$\bigodot_{x \in X} \mathcal{U}_x = \bigodot_{x \in X} \mathcal{V}_x.$$

Тогда в силу предложения 4.1 реализуется цепочка равенств

$$(\mathcal{U}_x)_{x \in X} = (\mathbf{P}_\chi^1(\bigodot_{x \in X} \mathcal{U}_x))_{\chi \in X} = (\mathbf{P}_\chi^1(\bigodot_{x \in X} \mathcal{V}_x))_{\chi \in X} = (\mathcal{V}_x)_{x \in X}. \quad (5.10)$$

Итак (см. (5.9), (5.10)), истинна следующая импликация

$$(\mathbf{f}((\mathcal{U}_x)_{x \in X}) = \mathbf{f}((\mathcal{V}_x)_{x \in X})) \implies ((\mathcal{U}_x)_{x \in X} = (\mathcal{V}_x)_{x \in X}).$$

Требуемая инъективность, а, стало быть, и биективность $\mathbf{f}$ (4.4) установлены. $\square$

Напомним, что уплотнением ТП (T_1, τ_1) на ТП (T_2, τ_2) называется всякая непрерывная биекция первого ТП на второе (см. [19, с. 382], [21, с.329]).

Теорема 5.1. *Отображение $\mathbf{f}$ (4.4) есть уплотнение ТП (5.4) на ТП (5.5).*

Доказательство получается непосредственной комбинацией предложений 5.1 и 5.2.

Итак, ящичное произведение ТП стоуновского типа уплотняется на ТП стоуновского типа, где измеримая структура задается ящичным произведением π -систем.

6. Стандартный вариант произведения пространств стоуновского типа

В последующих построениях используем (1.3), учитывая при этом, что для всякого множества Z имеет место $\pi[Z] \subset (\text{Fam})[Z]$. Тогда, в частности, $(\mathcal{L}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\text{Fam})[E_x]$ и, как следствие, имеем (см. [16, (6.4)])

$$\begin{aligned} \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x &= \{ \mathbb{L} \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x : \\ &(\mathbb{L} = \prod_{x \in X} L_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : L_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K) \} \in \pi[\mathbb{E}]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Отметим, кстати, что справедливо следующее очевидное свойство:

$$\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \subset \bigodot_{x \in X} \mathcal{L}_x.$$

Второе важное для нас обстоятельство состоит в том, что (см. [14, (4.4)])

$$\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \subset \prod_{x \in X} (\text{Fam})[E_x]. \quad (6.2)$$

С учетом (1.3) и (6.2) имеем свойство [14, (4.5)]; более того,

$$\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}] \quad \forall (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]. \quad (6.3)$$

Наконец, в силу [14, теорема 4.1] справедливо следующее равенство:

$$\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}] = \{ \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x : (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \}; \quad (6.4)$$

в дальнейшем (6.3) и (6.4) используем без дополнительных пояснений. Напомним (4.5), (4.8), учитывая, что согласно (4.10)

$$\Lambda = \prod_{\chi \in X} \mathbf{P}_\chi(\Lambda) \quad \forall \Lambda \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\emptyset\}.$$

Следуем соглашению (4.11). В этой связи напомним, что согласно [14, предложение 4.2]

$$\mathbf{P}_\chi^1(\mathcal{E}) \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link} \rangle_0[E_\chi] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}] \quad \forall \chi \in X. \quad (6.5)$$

Таким образом (см. (6.5), [14, (4.33)]), реализуется следующее свойство

$$(\mathbf{P}_x^1(\mathcal{E}))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]. \quad (6.6)$$

Будем рассматривать (6.3) и (6.6) в естественной совокупности, получая

Предложение 6.1. Если $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$, то

$$(\mathcal{E}_x)_{x \in X} = (\mathbf{P}_\chi^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x))_{\chi \in X}. \quad (6.7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $(\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$, получая в силу (6.3), что

$$\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}].$$

Поэтому (см. (6.6)) определено следующее отображение

$$(\mathbf{P}_\chi^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x))_{\chi \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x].$$

При этом $\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x \subset (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\emptyset\}$; см. [14, (3.24)]. Кроме того, напомним свойство [14, (4.21)]. Получаем, что при $\tilde{\Lambda} \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x$

$$\tilde{\Lambda} = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\tilde{\Lambda}). \quad (6.8)$$

Выберем произвольно $u \in X$, получая свойство $\mathcal{L}_u \in \pi[M_u]$, где $M_u \neq \emptyset$. Имеем при этом включение $\mathcal{E}_u \in \langle \mathcal{L}_u - \text{link} \rangle_0[E_u]$. Пусть $\mathbb{T} \in \mathcal{E}_u$, а $(T_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathbf{E})^X$ определяется правилом

$$(T_u \triangleq \mathbb{T}) \& (T_x \triangleq E_x \quad \forall x \in X \setminus \{u\}). \quad (6.9)$$

При этом $T_x \in \mathcal{E}_x \quad \forall x \in X$. С учетом (1.3) и (6.9) получаем, что

$$\prod_{x \in X} T_x \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x. \quad (6.10)$$

При этом, конечно, $T_x \in \mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\}$ при $x \in X$. С учетом (6.8) и (6.10) имеем равенство

$$\prod_{x \in X} T_x = \prod_{\chi \in X} \mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} T_x). \quad (6.11)$$

Далее, $\prod_{x \in X} T_x \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\emptyset\}$ согласно (6.10), а потому (см. (6.8), (6.10))

$$\prod_{\chi \in X} \mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} T_x) = \prod_{x \in X} T_x \neq \emptyset,$$

что означает справедливость следующего свойства: $\mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} T_x) \neq \emptyset \quad \forall \chi \in X$. Из (6.11) получаем в итоге (см. [14, (3.9)]), что $T_\chi = \mathbf{P}_\chi(\prod_{x \in X} T_x)$ при $\chi \in X$ и, в частности (см. (6.9)), $\mathbb{T} = \mathbf{P}_u(\prod_{x \in X} T_x)$, где согласно (6.10)

$$\mathbf{P}_u(\prod_{x \in X} T_x) \in \mathbf{P}_u^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x).$$

Стало быть, $\mathbb{T} \in \mathbf{P}_u^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x)$. Поскольку выбор $\mathbb{T}$ был произвольным, установлено, что

$$\mathcal{E}_u \subset \mathbf{P}_u^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x). \quad (6.12)$$

Выберем произвольно $\Lambda \in \mathbf{P}_u^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x)$, после чего подберем $\Omega \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x$, для которого

$$\Lambda = \mathbf{P}_u(\Omega). \quad (6.13)$$

По выбору Ω имеем согласно (1.3), что $\Omega \subset \mathbb{E}$ и для некоторого отображения $(\Omega_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{E}_x$

$$(\Omega = \prod_{x \in X} \Omega_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \Omega_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K). \quad (6.14)$$

Тогда $\Omega_x \in \mathcal{E}_x \ \forall x \in X$. В частности, имеем, что $\Omega_x \in \mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\}$ при $x \in X$. Согласно (6.8) и (6.14)

$$\prod_{x \in X} \Omega_x = \Omega = \prod_{x \in X} \mathbf{P}_x(\Omega), \quad (6.15)$$

где $\Omega \in (\bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x) \setminus \{\emptyset\}$ (см. [14, (3.24)]). Тогда из (6.15) следует, во первых, что

$$(\Omega_x \neq \emptyset) \& (\mathbf{P}_x(\Omega) \neq \emptyset)$$

при $x \in X$, и во-вторых, согласно [14, (3.9)]

$$\Omega_x = \mathbf{P}_x(\Omega) \ \forall x \in X.$$

В частности (см. (6.13)), $\Lambda = \mathbf{P}_u(\Omega) = \Omega_u$, где $\Omega_u \in \mathcal{E}_u$. Поэтому $\Lambda \in \mathcal{E}_u$, чем и завершается проверка свойства $\mathbf{P}_u^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x) \subset \mathcal{E}_u$. С учетом (6.12) имеем равенство

$$\mathcal{E}_u = \mathbf{P}_u^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x).$$

Поскольку выбор $u \in X$ был произвольным, установлено, что

$$\mathcal{E}_x = \mathbf{P}_x^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x) \ \forall x \in X.$$

Как следствие получаем требуемое равенство (6.7). $\square$

Заметим, что с учетом (6.3) определяется отображение

$$\mathbf{g} : \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \longrightarrow \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}] \quad (6.16)$$

посредством следующего правила: $\forall (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$

$$\mathbf{g}((\mathcal{E}_x)_{x \in X}) \triangleq \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x. \quad (6.17)$$

Согласно (3.2) и (6.1) определена открытая предбаза

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x] = \{ \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0^0[\mathbb{E}|L] : L \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \in (\text{p-BAS})[\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]] \}. \quad (6.18)$$

С другой стороны, при $x \in X$ имеем что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \in (\text{Fam})[\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]]$ (в самом деле, $\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0^0[E_x|E_x] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$). При этом согласно (1.3)

$$\begin{aligned} \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] &= \{ \mathbb{C} \in \mathcal{P}(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]) | \exists (\mathbb{F}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] : \\ &(\mathbb{C} = \prod_{x \in X} \mathbb{F}_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \mathbb{F}_s = \langle \mathcal{L}_s - \text{link} \rangle_0[E_s] \ \forall s \in X \setminus K) \}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Предложение 6.2. Если $\mathbf{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x]$, то

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H}) \in \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]. \quad (6.20)$$

Доказательство. Фиксируем $\mathbf{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x]$. Тогда в силу (6.18) для некоторого $\Lambda \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x$ справедливо равенство

$$\mathbf{H} = \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E}|\Lambda]. \quad (6.21)$$

Поэтому согласно (6.1) $\Lambda \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$ и для некоторого отображения

$$(\Lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$$

имеют место следующие свойства

$$(\Lambda = \prod_{x \in X} \Lambda_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \Lambda_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K). \quad (6.22)$$

При этом, конечно, $\Lambda_x \in \mathcal{L}_x$ при $x \in X$. Пусть (см. (6.22)) $\mathbb{K} \in \text{Fin}(X)$ таково, что

$$\Lambda_s = E_s \ \forall s \in X \setminus \mathbb{K}. \quad (6.23)$$

Рассмотрим теперь множества $\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|\Lambda_x]$ при $x \in X$. Тогда при $x \in X \setminus \mathbb{K}$ в силу (6.23)

$$\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|\Lambda_x] = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]. \quad (6.24)$$

Далее, заметим, что $\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|\Lambda_x] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$ при $x \in X$ согласно (3.2). Тогда получаем, что

$$(\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|\Lambda_x])_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x].$$

Итак (см. (6.24), (6.16)), получаем, что

$$\begin{aligned} & (\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|\Lambda_x])_{x \in X} \in \\ & \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] : \langle \mathcal{L}_s - \text{link} \rangle^0[E_s|\Lambda_s] = \langle \mathcal{L}_s - \text{link} \rangle_0[E_s] \ \forall s \in X \setminus \mathbb{K}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Отметим, что при $x \in X$ реализуется следующая цепочка вложений

$$\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|\Lambda_x] \subset \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \subset \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{L}_x) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_x)) \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})).$$

Поэтому, как легко видеть, имеет место

$$\begin{aligned} \mathbb{L} & \triangleq \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|\Lambda_x] \\ & = \{(\eta_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X \mid \eta_s \in \langle \mathcal{L}_s - \text{link} \rangle^0[E_s|\Lambda_s] \ \forall s \in X\} \in \mathcal{P}(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Тогда из (6.19), (6.25) и (6.26) вытекает следующее включение

$$\mathbb{L} \in \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]. \quad (6.27)$$

Сравним множества $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})$ и $\mathbb{L}$. Пусть $\mathfrak{H} \in \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})$. Тогда, в частности, выполнено $\mathfrak{H} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$. Это означает, что $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_x)_{x \in X}$, где $\mathfrak{H}_\chi \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link} \rangle_0[E_\chi]$ при $\chi \in X$,

$$\mathbf{g}((\mathfrak{H}_x)_{x \in X}) = \mathbf{g}(\mathfrak{H}) \in \mathbf{H}. \quad (6.28)$$

Но $\mathbf{g}((\mathfrak{H}_x)_{x \in X}) = \bigotimes_{x \in X} \mathfrak{H}_x$. С учетом (6.21) и (6.28) получаем теперь, что

$$\bigotimes_{x \in X} \mathfrak{H}_x \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E}|\Lambda]. \quad (6.29)$$

Тогда в силу (3.3) получаем, что $\bigotimes_{x \in X} \mathfrak{H}_x \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]$ и при этом $\Lambda \in \bigotimes_{x \in X} \mathfrak{H}_x$. С учетом (1.3) получаем теперь, что для некоторого отображения $(\tilde{\mathbb{F}}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathfrak{H}_x$ справедливо следующее равенство

$$\Lambda = \prod_{x \in X} \tilde{\mathbb{F}}_x. \quad (6.30)$$

Из (6.22) и (6.30) следует, в свою очередь, равенство

$$\prod_{x \in X} \Lambda_x = \prod_{x \in X} \tilde{\mathbb{F}}_x. \quad (6.31)$$

В силу (6.29) получаем, что имеет место свойство непустоты:

$$\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E}|\Lambda] \neq \emptyset,$$

а тогда $\Lambda \neq \emptyset$ и, стало быть (см. (6.22)), $\Lambda_\chi \neq \emptyset$ при $\chi \in X$. Кроме того, из (6.30) вытекает, что

$$\prod_{x \in X} \tilde{\mathbb{F}}_x \neq \emptyset,$$

а тогда $\tilde{\mathbb{F}}_\chi \neq \emptyset$ при $\chi \in X$. Заметим, что $\Lambda_x \subset \mathbf{E} \forall x \in X$. Поэтому $(\Lambda_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$. Далее, при $x \in X$ имеем также включение $\tilde{\mathbb{F}}_x \in \mathfrak{H}_x$, где $\mathfrak{H}_x \subset \mathcal{L}_x \setminus \{\emptyset\}$; поэтому $\tilde{\mathbb{F}}_x \neq \emptyset$ и $\tilde{\mathbb{F}}_x \subset E_x \subset \mathbf{E}$. В итоге $(\tilde{\mathbb{F}}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X$. Тогда в силу (4.15), (6.31) и [14, (3.9)] получаем, что при $x \in X$ справедливо равенство $\Lambda_x = \tilde{\mathbb{F}}_x$ и, стало быть (см. (3.1)), $\mathfrak{H}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x|\Lambda_x]$. Следовательно, согласно (6.26) $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}_x)_{x \in X} \in \mathbb{L}$. Итак, установлено, что

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H}) \subset \mathbb{L}. \quad (6.32)$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{L}$. Тогда $\lambda = (\lambda_x)_{x \in X}$, где

$$\lambda_\chi \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link} \rangle^0[E_\chi|\Lambda_\chi] \quad \forall \chi \in X. \quad (6.33)$$

При этом $\lambda \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X$. Из (6.33) следует, что при $x \in X$ непременно $\lambda_x \in \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$ и, кроме того, $\Lambda_x \in \lambda_x$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\lambda) &= \bigotimes_{x \in X} \lambda_x = \{ \mathbb{H} \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (\mathbb{F}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \lambda_x : \\ &\quad (\mathbb{H} = \prod_{x \in X} \mathbb{F}_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \mathbb{F}_\chi = E_\chi \quad \forall \chi \in X \setminus K) \}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Согласно (6.33) $\Lambda_x \in \lambda_x$ при $x \in X$. С учетом (6.22) и (6.23) получаем, что отображение $(\Lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \lambda_x$ таково, что

$$(\Lambda = \prod_{x \in X} \Lambda_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \Lambda_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K). \quad (6.35)$$

Из (6.22), (6.34) и (6.35) вытекает, что $\Lambda \in \mathbf{g}(\lambda)$. При этом $\mathbf{g}(\lambda) \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]$.

С учетом (3.1) имеем теперь свойство

$$\mathbf{g}(\lambda) \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E}|\Lambda],$$

а потому (см. (6.21)) $\mathbf{g}(\lambda) \in \mathbf{H}$ и, следовательно, $\lambda \in \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})$. Итак, $\mathbb{L} \subset \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H})$, а тогда (см. (6.32)) $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H}) = \mathbb{L}$. С учетом (6.27) получаем (6.20). $\square$

Напомним, что (см. (3.3)) при $x \in X$ справедливо свойство

$$\mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \in (\text{top})[\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]] \quad (6.36)$$

и согласно (3.5) $\hat{\mathcal{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \subset \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle$; ясно также, что $\mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \in (\text{Fam})[\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]]$, где $\emptyset \neq \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))$. Тогда имеем, в частности, что

$$(\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x])_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X \quad (6.37)$$

может использоваться в качестве $(Y_x)_{x \in X}$ в (1.3) (в качестве Y используем $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))$). Поэтому определено отображение

$$(\mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} (\text{Fam})[\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]].$$

Как следствие определено (см. (1.3)) следующее семейство:

$$\begin{aligned} \bigotimes_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle &= \{ \mathbb{H} \in \mathcal{P}(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]) \mid \exists (\mathbb{B}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle : \\ &(\mathbb{H} = \prod_{x \in X} \mathbb{B}_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \mathbb{B}_s = \langle \mathcal{L}_s - \text{link} \rangle_0[E_s] \ \forall s \in X \setminus K) \}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

З а м е ч а н и е 6.1. Обозначение $\bigotimes_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle$ часто используется для тихоновского произведения топологий. В настоящем изложении, имея в виду роль конструкций на основе измеримых в широком смысле прямоугольников, мы упомянутому правилу не следуем и оперируем с (6.38) как с семейством открытых прямоугольников. Данная особенность в обозначениях существенна для дальнейшего.

З а м е ч а н и е 6.2. Отметим одну полезную интерпретацию (6.38), связанную с π -системами. Действительно, из (6.36) следует, в частности, что

$$\mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \in \pi[\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]] \ \forall x \in X.$$

При этом справедливо (6.37). Тогда (см. [16, (6.4)]) определена следующая π -система:

$$\bigotimes_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \in \pi[\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]].$$

С учетом последнего замечания имеем, конечно, известное [21, 2.3.1] свойство

$$\bigotimes_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \in (\text{BAS}) \left[\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x] \right]. \quad (6.39)$$

В свою очередь, (6.39) позволяет ввести нужную топологию. Здесь, однако, мы имеем известную конструкцию тихоновского произведения (см., например, [21, раздел 2.3]). А именно,

$$\mathbf{t}_\otimes \triangleq \{\cup\} \left(\bigotimes_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \right) \in (\text{top}) \left[\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x] \right]. \quad (6.40)$$

Таким образом, мы получили в виде

$$\left(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x], \mathbf{t}_\otimes \right) \quad (6.41)$$

тихоновское произведение ТП $(\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x], \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle)$, $x \in X$. Отметим, что

$$\bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \subset \bigotimes_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \subset \mathbf{t}_\otimes. \quad (6.42)$$

З а м е ч а н и е 6.3. В целях полноты изложения проверим первое вложение в (6.42). Действительно, при $x \in X$ имеем (см. (3.5), (6.37))

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \subset \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \subset \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x]) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))). \quad (6.43)$$

Как следствие получаем, что $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))$ при $x \in X$. Иными словами,

$$(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x])_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))^X,$$

а тогда (с учетом аксиомы выбора) получаем следующее представление

$$\prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] = \{ (\mathbb{H}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))^X \mid \mathbb{H}_t \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_t; \mathcal{L}_t] \ \forall t \in X \} \neq \emptyset. \quad (6.44)$$

С другой стороны, в силу (6.43) имеем, что $\mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))$ при $x \in X$. Тогда

$$\prod_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle = \{ (\mathbb{G}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))^X \mid \mathbb{G}_t \in \mathbb{T}_* \langle E_t | \mathcal{L}_t \rangle \ \forall t \in X \} \neq \emptyset. \quad (6.45)$$

С учетом (6.43), (6.44) и (6.45) получаем, что

$$\prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \subset \prod_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle. \quad (6.46)$$

Теперь из (6.19), (6.38) и (6.46) получаем требуемое свойство $\bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \subset \bigotimes_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle$.

Из (6.42) и предложения 6.2 вытекает, что справедливо следующее положение:

$$\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{H}) \in \mathbf{t}_\otimes \ \forall \mathbf{H} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbf{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x]. \quad (6.47)$$

Напомним также, что согласно (3.3) и (6.1) определена топология стоуновского типа

$$\mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} | \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle = \{\cup\}(\{\cap\}_{\#}(\hat{\mathcal{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x])) \in (\text{top})[\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]]. \quad (6.48)$$

При этом, конечно, имеем согласно (3.5) и (6.1) свойство

$$\hat{\mathcal{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x] \in (\text{p-BAS})_0[\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]; \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} | \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle]. \quad (6.49)$$

Из (6.47)–(6.49) вытекает (см. [21, предложение 1.4.1]) следующее

Предложение 6.3. В виде $\mathbf{g}$ (6.16) реализуется непрерывное отображение ТП (6.41) на ТП

$$(\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}], \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} | \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle). \quad (6.50)$$

Предложение 6.4. Отображение $\mathbf{g}$ (6.16) является биекцией множества $\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$ на $\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]$.

Докладательство. Из (6.4) и (6.17) вытекает, что отображение $\mathbf{g}$ сюръективно. Пусть

$$((\mathcal{E}'_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]) \& ((\mathcal{E}''_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x])$$

таковы, что справедливо следующее равенство:

$$\mathbf{g}((\mathcal{E}'_x)_{x \in X}) = \mathbf{g}((\mathcal{E}''_x)_{x \in X}). \quad (6.51)$$

Из (6.17) и (6.51) вытекает с очевидностью, что

$$\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}'_x = \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}''_x. \quad (6.52)$$

Тогда, как видно из (6.6), (6.52) и предложения 6.1,

$$(\mathcal{E}'_x)_{x \in X} = (\mathbf{P}_\chi^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}'_x))_{\chi \in X} = (\mathbf{P}_\chi^1(\bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}''_x))_{\chi \in X} = (\mathcal{E}''_x)_{x \in X}. \quad (6.53)$$

Итак (см. (6.51), (6.53)), истинна следующая импликация

$$(\mathbf{g}((\mathcal{E}'_x)_{x \in X}) = \mathbf{g}((\mathcal{E}''_x)_{x \in X})) \implies ((\mathcal{E}'_x)_{x \in X} = (\mathcal{E}''_x)_{x \in X}). \quad (6.54)$$

Поскольку $(\mathcal{E}'_x)_{x \in X}$ и $(\mathcal{E}''_x)_{x \in X}$ выбирались произвольно, установлена (см. (6.54)) требуемая инъективность, а, стало быть, и биективность $\mathbf{g}$. $\square$

С учетом предложений 6.3 и 6.4 получаем, конечно, что $\mathbf{g}$ (6.16) есть уплотнение ТП (6.41) на ТП (6.50); получен аналог теоремы 5.1. Однако, в данном случае упомянутое свойство допускает усиление.

Заметим, что при $x \in X$ и $L \in \mathcal{L}_x$ имеет место

$$\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | L] \subset \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \subset \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})),$$

а тогда $\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | L] \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$. Поэтому при $(L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$ имеем, что

$$(\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | L_x])_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X.$$

Предложение 6.5. Если $\mathbb{H} \in \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$, то $\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x]$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{H} \in \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$. Тогда (см. (6.19))

$$\mathbb{H} \in \mathcal{P}\left(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]\right)$$

и для некоторого отображения

$$(\mathbb{F}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \quad (6.55)$$

справедливо равенство $\mathbb{H} = \prod_{x \in X} \mathbb{F}_x$ и для некоторого $\mathbb{K} \in \text{Fin}(X)$ имеет место

$$\mathbb{F}_s = \langle \mathcal{L}_s - \text{link} \rangle_0[E_s] \quad \forall s \in X \setminus \mathbb{K}. \quad (6.56)$$

Из (6.55) следует, что $\mathbb{F}_x \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$ при $x \in X$; как следствие имеем (с использованием аксиомы выбора) для некоторого отображения $(\Lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$ систему равенств

$$\mathbb{F}_\chi = \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link} \rangle^0[E_\chi | \Lambda_\chi] \quad \forall \chi \in X. \quad (6.57)$$

В этом случае получаем следующее очевидное равенство:

$$\mathbb{H} = \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \Lambda_x].$$

При этом $\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \Lambda_x] = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall x \in X \setminus \mathbb{K}$. С учетом этого введем $(\tilde{\Lambda}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x$ по правилу

$$(\tilde{\Lambda}_x \triangleq \Lambda_x \quad \forall x \in \mathbb{K}) \& (\tilde{\Lambda}_x \triangleq E_x \quad \forall x \in X \setminus \mathbb{K}). \quad (6.58)$$

Тогда в силу (6.56) и (6.58) получаем при $x \in X \setminus \mathbb{K}$, что

$$\mathbb{F}_x = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \tilde{\Lambda}_x]. \quad (6.59)$$

С другой стороны, из (6.57) и (6.58) вытекает, что

$$\mathbb{F}_x = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \Lambda_x] = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \tilde{\Lambda}_x] \quad \forall x \in \mathbb{K}.$$

С учетом (6.59) получаем теперь следующее свойство:

$$\mathbb{F}_x = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \tilde{\Lambda}_x] \quad \forall x \in X. \quad (6.60)$$

Из (6.60) вытекает, что справедливо очевидное равенство

$$(\mathbb{F}_x)_{x \in X} = (\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \tilde{\Lambda}_x])_{x \in X}.$$

Заметим, что $\tilde{\Lambda}_x \subset E_x \subset \mathbf{E}$ при $x \in X$. Поэтому получаем, что

$$\tilde{\Lambda} \triangleq \prod_{x \in X} \tilde{\Lambda}_x \subset \mathbb{E} \subset \mathbf{E}^X. \quad (6.61)$$

Получили, в частности, что $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$. Далее, из (6.58) следует, что (см. (6.61))

$$\exists (L_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{L}_x : (\tilde{\Lambda} = \prod_{x \in X} L_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : L_s = E_s \forall s \in X \setminus K). \quad (6.62)$$

Из (6.1) и (6.62) вытекает очевидное включение

$$\tilde{\Lambda} \in \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x. \quad (6.63)$$

Тогда в силу (3.1), (3.2) и (6.63) имеем следующее равенство:

$$\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E} | \tilde{\Lambda}] = \{ \mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}] | \tilde{\Lambda} \in \mathcal{E} \} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x]. \quad (6.64)$$

Вернемся к (6.16). Тогда по выбору $\mathbb{H}$ получаем равенство

$$\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) = \{ \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x : (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \mathbb{H} \}. \quad (6.65)$$

Сравним множества (6.64) и (6.65). Пусть $\mathcal{U} \in \mathbf{g}^1(\mathbb{H})$. Тогда (см. (6.16)), в частности,

$$\mathcal{U} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]. \quad (6.66)$$

При этом по выбору $\mathcal{U}$ имеем (см. (6.65)) для некоторого отображения

$$(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \mathbb{H} \quad (6.67)$$

следующее равенство

$$\mathcal{U} = \bigotimes_{x \in X} \mathcal{U}_x. \quad (6.68)$$

Учтем представление $\mathbb{H}$, связанное с (6.55). Тогда (см. (6.67)) $(\mathcal{U}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}_x$, что означает справедливость свойства $\mathcal{U}_x \in \mathbb{F}_x \forall x \in X$. С учетом (6.60) получаем теперь, что

$$\mathcal{U}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \tilde{\Lambda}_x] \forall x \in X. \quad (6.69)$$

Поэтому при $x \in X$ имеем, что $\mathcal{U}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$ и при этом $\tilde{\Lambda}_x \in \mathcal{U}_x$. Отметим, что, в частности, $\mathcal{U}_x \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E_x))$ при $x \in X$. Согласно (1.3) и (6.68)

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{ H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) | \exists (B_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{U}_x : \\ &\quad (H = \prod_{x \in X} B_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : B_s = E_s \forall s \in X \setminus K) \}. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Тогда для $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{P}(\mathbb{E})$ мы имеем требуемое в (6.70) представление. В самом деле, в силу (6.69) $\tilde{\Lambda}_x \in \mathcal{U}_x$ при $x \in X$. Это означает, что $(\tilde{\Lambda}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{U}_x$. С учетом (6.58) и (6.61) получаем теперь, что

$$(\tilde{\Lambda}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{U}_x : (\tilde{\Lambda} = \prod_{x \in X} \tilde{\Lambda}_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \tilde{\Lambda}_s = E_s \forall s \in X \setminus K).$$

С учетом (6.70) имеем, что $\tilde{\Lambda} \in \mathcal{U}$. Теперь получаем (см. (3.1), (6.66)), что

$$\mathcal{U} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E}|\tilde{\Lambda}].$$

Итак, установлено, что

$$\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) \subset \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E}|\tilde{\Lambda}]. \quad (6.71)$$

Выберем произвольно $\mathcal{V} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E}|\tilde{\Lambda}]$. Тогда, в частности, имеем, что

$$\mathcal{V} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}], \quad (6.72)$$

и при этом справедливо следующее включение:

$$\tilde{\Lambda} \in \mathcal{V}. \quad (6.73)$$

С учетом (6.4) и (6.72) получаем, что для некоторого отображения

$$(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$$

реализуется равенство $\mathcal{V} = \bigotimes_{x \in X} \mathcal{V}_x$. Из (6.17) вытекает теперь, что

$$\mathcal{V} = \mathbf{g}((\mathcal{V}_x)_{x \in X}). \quad (6.74)$$

При этом согласно (1.3) имеем из (6.74), что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = \{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (B_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{V}_x : \\ (H = \prod_{x \in X} B_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : B_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K)\}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Поэтому (см. (6.73), (6.75)) для некоторого отображения $(V_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{V}_x$ реализуются следующие свойства:

$$(\tilde{\Lambda} = \prod_{x \in X} V_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : V_s = E_s \ \forall s \in X \setminus K). \quad (6.76)$$

Тогда $V_x \in \mathcal{V}_x \ \forall x \in X$. В силу сцепленности $\mathcal{V}_x$, $x \in X$, имеем, что $V_s \neq \emptyset$ при $s \in X$. Кроме того, $V_x \subset E_x \subset \mathbf{E}$ при $x \in X$. В итоге

$$(V_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X. \quad (6.77)$$

Тогда (см. (6.76), (6.77); учитываем аксиому выбора) имеем $\tilde{\Lambda} \neq \emptyset$, а потому согласно (6.61) $\tilde{\Lambda}_x \neq \emptyset$ при $x \in X$. В итоге

$$(\tilde{\Lambda}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathbf{E})^X. \quad (6.78)$$

Наконец, из (6.61) и (6.76) имеем следующее равенство

$$\prod_{x \in X} \tilde{\Lambda}_x = \prod_{x \in X} V_x.$$

Тогда (см. (6.77), (6.78), [14, (3.9)]) получаем, что $\tilde{\Lambda}_x = V_x \quad \forall x \in X$. Поэтому $\tilde{\Lambda}_x \in \mathcal{V}_x \quad \forall x \in X$. В этом случае

$$\mathcal{V}_x \in \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \tilde{\Lambda}_x] \quad \forall x \in X.$$

Иными словами, справедливо следующее очевидное включение:

$$(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | \tilde{\Lambda}_x].$$

С учетом (6.60) получаем теперь, что $(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{F}_x$, а потому $(\mathcal{V}_x)_{x \in X} \in \mathbb{H}$. Как следствие (см. (6.74)) $\mathcal{V} \in \mathbf{g}^1(\mathbb{H})$. Итак, установлено, что

$$\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E} | \tilde{\Lambda}] \subset \mathbf{g}^1(\mathbb{H}).$$

С учетом (6.71) получаем следующее равенство

$$\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) = \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[\mathbb{E} | \tilde{\Lambda}],$$

а тогда в силу (6.64) получаем требуемое свойство $\mathbf{g}^1(\mathbb{H}) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x]$. $\square$

7. Об одном свойстве гомеоморфности

Конструкции настоящего раздела продолжают построения предыдущего. Мы рассмотрим сначала вопрос об открытости (6.16) как отображения ТП (6.41) на ТП (6.50).

Предложение 7.1. *Отображение $\mathbf{g}$ (6.16) открыто, то есть $\mathbf{g}$ непрерывно и, кроме того, имеет место свойство: если $\mathbb{G} \in \mathbf{t}_\otimes$, то $\mathbf{g}^1(\mathbb{G}) \in \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} | \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle$.*

Доказательство. Прежде всего напомним, что отображение $\mathbf{g}$ непрерывно (см. предложение 6.3). Фиксируем $\mathbb{G} \in \mathbf{t}_\otimes$ и рассмотрим множество

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^1(\mathbb{G}) &= \{ \mathbf{g}((\mathcal{E}_x)_{x \in X}) : (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \mathbb{G} \} \\ &= \{ \bigotimes_{x \in X} \mathcal{E}_x : (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \mathbb{G} \} \in \mathcal{P}(\langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Выберем произвольно $\mathcal{E} \in \mathbf{g}^1(\mathbb{G})$. Тогда получаем, что

$$\mathcal{E} \in \langle \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[\mathbb{E}]$$

и, в частности, $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{E}))$. По выбору $\mathcal{E}$ имеем, что для некоторого $(\eta_x)_{x \in X} \in \mathbb{G}$

$$\mathcal{E} = \mathbf{g}((\eta_x)_{x \in X}) = \bigotimes_{x \in X} \eta_x. \quad (7.2)$$

При этом, конечно, $(\eta_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]$. Отметим, что в силу (6.40) для некоторого множества

$$\mathbf{B} \in \bigotimes_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle \quad (7.3)$$

имеют место следующие свойства:

$$((\eta_x)_{x \in X} \in \mathbf{B}) \& (\mathbf{B} \subset \mathbb{G}). \quad (7.4)$$

Тогда (см. (6.38), (7.3)) получаем, что $\mathbf{B} \in \mathcal{P}(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x])$ и для некоторого отображения $(\mathbb{B}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle$

$$(\mathbf{B} = \prod_{x \in X} \mathbb{B}_x) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \mathbb{B}_s = \langle \mathcal{L}_s - \text{link} \rangle_0[E_s] \quad \forall s \in X \setminus K). \quad (7.5)$$

Из (7.4) и (7.5) имеем, что $(\eta_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{B}_x$. Поэтому $\eta_x \in \mathbb{B}_x \quad \forall x \in X$. Следовательно, при $x \in X$ имеем, что

$$\mathbb{B}_x \in \mathbb{T}_* \langle E_x | \mathcal{L}_x \rangle : \eta_x \in \mathbb{B}_x. \quad (7.6)$$

С учетом (7.5) выберем и зафиксируем множество $\mathbb{K} \in \text{Fin}(X)$, для которого

$$\mathbb{B}_s = \langle \mathcal{L}_s - \text{link} \rangle_0[E_s] \quad \forall s \in X \setminus \mathbb{K}. \quad (7.7)$$

Используя (3.3) и (7.6) получаем, что при $x \in X$ непременно имеет место свойство

$$\exists \mathbf{H} \in \{\cap\}_\#(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]) : (\eta_x \in \mathbf{H}) \& (\mathbf{H} \subset \mathbb{B}_x).$$

Данное свойство может быть переписано в следующем виде: $\forall x \in X$

$$\mathcal{H}_x \triangleq \{ \mathbf{H} \in \{\cap\}_\#(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]) | (\eta_x \in \mathbf{H}) \& (\mathbf{H} \subset \mathbb{B}_x) \} \in \mathcal{P}'(\{\cap\}_\#(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x])). \quad (7.8)$$

С учетом (7.8) (и аксиомы выбора) имеем непустое множество $\prod_{x \in X} \mathcal{H}_x$. Используя упомянутое свойство непустоты, выберем $(\mathbb{H}_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathcal{H}_x$. Тогда (см. (7.8))

$$\mathbb{H}_x \in \{\cap\}_\#(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]) \quad \forall x \in X;$$

кроме того, с учетом (7.8) имеем следующее свойство: $\forall x \in X$

$$(\eta_x \in \mathbb{H}_x) \& (\mathbb{H}_x \subset \mathbb{B}_x). \quad (7.9)$$

При этом, конечно, получаем, что $\forall x \in X \quad \exists \mathcal{K} \in \text{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]) :$

$$\mathbb{H}_x = \bigcap_{S \in \mathcal{K}} S. \quad (7.10)$$

С учетом конечности множества $\mathbb{K}$ подберем (см. [22, (1.4.4)]) $n \in \mathbb{N}$ и инъективное отображение $(\kappa_i)_{i \in \overline{1, n}} \in X^n$, для которых

$$\mathbb{K} = \{ \kappa_i : i \in \overline{1, n} \}. \quad (7.11)$$

Тогда, в частности, имеем из (7.9), что $\forall j \in \overline{1, n}$

$$(\eta_{\kappa_j} \in \mathbb{H}_{\kappa_j}) \& (\mathbb{H}_{\kappa_j} \subset \mathbb{B}_{\kappa_j}). \quad (7.12)$$

В свою очередь, из (7.10) и (7.11) вытекает, что $\forall j \in \overline{1, n} \quad \exists \mathcal{K} \in \text{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j}; \mathcal{L}_{\kappa_j}]) :$

$$\mathbb{H}_{\kappa_j} = \bigcap_{S \in \mathcal{K}} S. \quad (7.13)$$

С учетом этого выберем $(\mathcal{K}_i)_{i \in \overline{1, n}} \in \prod_{i=1}^n \text{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_i}; \mathcal{L}_{\kappa_i}])$ со свойством, определяемым в (7.13):

$$\mathbb{H}_{\kappa_j} = \bigcap_{S \in \mathcal{K}_j} S \quad \forall j \in \overline{1, n}. \quad (7.14)$$

Тогда в виде $\mathbf{K} \triangleq \prod_{i=1}^n \mathcal{K}_i$ реализуется непустое конечное множество. Полезно заметить, что при $x \in X$ согласно (3.2)

$$\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \subset \mathcal{P}(\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))).$$

Поэтому $\mathcal{K}_j \subset \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j}; \mathcal{L}_{\kappa_j}] \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$ при $j \in \overline{1, n}$. Тогда

$$\mathcal{K}_j \in \text{Fin}(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))) \quad \forall j \in \overline{1, n}. \quad (7.15)$$

Как следствие получаем следующее свойство конечности:

$$\mathbf{K} \in \text{Fin}(\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))^n. \quad (7.16)$$

Пусть (см. (7.16)) $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$ и $(Z_l)_{l \in \overline{1, \mathbf{n}}} \in (\mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))))^{\mathbf{n}}$ таковы, что

$$\mathbf{K} = \{ Z_l : l \in \overline{1, \mathbf{n}} \}. \quad (7.17)$$

Итак, $Z_l \in \mathbf{K} \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}$. Кроме того, $\forall \mathbb{S} \in \mathbf{K} \quad \exists l \in \overline{1, \mathbf{n}} : \mathbb{S} = Z_l$. Отметим также, что при $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$ и $j \in \overline{1, n}$

$$Z_l(j) \in \mathcal{K}_j; \quad (7.18)$$

здесь мы напомним, что $Z_l : \overline{1, n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$, причем

$$Z_l(j) \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j}; \mathcal{L}_{\kappa_j}] \quad \forall j \in \overline{1, n}. \quad (7.19)$$

Мы учитываем, что $\mathcal{K}_j \in \text{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j}; \mathcal{L}_{\kappa_j}])$ и, в частности,

$$\mathcal{K}_j \subset \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_j}; \mathcal{L}_{\kappa_j}] \quad (7.20)$$

при $j \in \overline{1, n}$. Тогда (7.19) получается комбинацией (7.18) и (7.20). Напомним здесь же, что при $x \in X$ непременно

$$\langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle^0[E_x | E_x] \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x].$$

Заметим, что (см. [22, (1.4.4)]) наряду с (7.11) истинно также, что $\forall i_1 \in \overline{1, n} \quad \forall i_2 \in \overline{1, n}$

$$(\kappa_{i_1} = \kappa_{i_2}) \implies (i_1 = i_2). \quad (7.21)$$

Если $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$, то введем в рассмотрение (см. (7.19)) отображение

$$(\mathbb{Z}_x^{(l)})_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \quad (7.22)$$

по следующему правилу, использующему (7.11) и (7.21):

$$(\mathbb{Z}_x^{(l)} \triangleq \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall x \in X \setminus \mathbb{K}) \& (\mathbb{Z}_{\kappa_j}^{(l)} \triangleq Z_l(j) \quad \forall j \in \overline{1, n}). \quad (7.23)$$

Итак, при $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$ в связи с (7.22) и (7.23) отметим, что $\mathbb{Z}_x^{(l)} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$ при $x \in X \setminus \mathbb{K}$; кроме того, из (7.19) вытекает (см. (3.1), (3.2)), что $\mathbb{Z}_{\kappa_j}^{(l)} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$ при $j \in \overline{1, n}$. С учетом (7.11) и (7.12) получаем теперь, что при $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$

$$(\mathbb{Z}_x^{(l)})_{x \in X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^X. \quad (7.24)$$

Вместе с тем, при $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$ и $x \in X$ в силу (7.22) $\mathbb{Z}_x^{(l)} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x]$, а потому согласно (3.1) и (3.2)

$$\mathbb{Z}_x^{(l)} \subset \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}} \quad \forall x \in X. \quad (7.25)$$

Тогда согласно (7.24) и (7.25) получаем, в частности, что при $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$

$$\mathcal{Z}_l \triangleq \prod_{x \in X} \mathbb{Z}_x^{(l)} = \{ (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X \mid \mathcal{E}_\chi \in \mathbb{Z}_\chi^{(l)} \quad \forall \chi \in X \}. \quad (7.26)$$

Из (7.25) и (7.26) вытекает, что $\mathcal{E}_\chi \in \langle \mathcal{L}_\chi - \text{link} \rangle_0[E_\chi] \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}} \quad \forall (\mathcal{E}_x)_{x \in X} \in \mathcal{Z}_l \quad \forall \chi \in X$. Тогда (см. (7.26)) получаем, что

$$\mathcal{Z}_l \subset \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}. \quad (7.27)$$

Отметим теперь, что согласно (7.22) и (7.26) у нас при $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$

$$(\mathbb{Z}_x^{(l)})_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] : \mathcal{Z}_l = \prod_{x \in X} \mathbb{Z}_x^{(l)}. \quad (7.28)$$

При этом $\mathbb{K} \in \text{Fin}(X)$ таково, что (см. (7.23)) при $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$

$$\mathbb{Z}_x^{(l)} = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall x \in X \setminus \mathbb{K}. \quad (7.29)$$

Поэтому (см. (7.28), (7.29)) при $l \in \overline{1, \mathbf{n}}$ имеем, что

$$\begin{aligned} (\mathbb{Z}_x^{(l)})_{x \in X} &\in \prod_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] : \\ &(\mathcal{Z}_l = \prod_{x \in X} \mathbb{Z}_x^{(l)}) \& (\exists K \in \text{Fin}(X) : \mathbb{Z}_x^{(l)} = \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall x \in X \setminus K). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Учтем (6.19) и (7.27). Тогда в силу (7.30) получаем следующее свойство:

$$\mathcal{Z}_l \in \bigotimes_{x \in X} \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_x; \mathcal{L}_x] \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}. \quad (7.31)$$

Напомним (7.6) и (7.12). Отметим также, что по выбору $(\eta_x)_{x \in X}$ имеем

$$\eta_x \in \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x] \quad \forall x \in X. \quad (7.32)$$

Тогда (см. (7.23), (7.32)) получаем, что справедливо свойство

$$\eta_x \in \mathbb{Z}_x^{(l)} \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}} \quad \forall x \in X \setminus \mathbb{K}. \quad (7.33)$$

Пусть теперь $r \in \overline{1, n}$. Тогда $\kappa_r \in \mathbb{K}$. Рассмотрим множества $Z_l(r) \in \mathcal{K}_r$, $l \in \overline{1, n}$. Согласно (7.14)

$$\mathbb{H}_{\kappa_r} = \bigcap_{S \in \mathcal{K}_r} S, \quad (7.34)$$

причем (см. (7.12)) $\eta_{\kappa_r} \in \mathbb{H}_{\kappa_r}$. С учетом (7.34) получаем, что

$$\eta_{\kappa_r} \in S \quad \forall S \in \mathcal{K}_r. \quad (7.35)$$

Согласно (7.18) $Z_l(r) \in \mathcal{K}_r$ при $l \in \overline{1, n}$. Поэтому (см. (7.35)) $\eta_{\kappa_r} \in Z_l(r) \quad \forall l \in \overline{1, n}$. Иными словами,

$$\eta_{\kappa_r} \in \bigcap_{l=1}^n Z_l(r). \quad (7.36)$$

Поскольку выбор r был произвольным, установлено (см. (7.36)), что

$$\eta_{\kappa_j} \in Z_l(j) \quad \forall l \in \overline{1, n} \quad \forall j \in \overline{1, n}. \quad (7.37)$$

С учетом (7.23) и (7.37) получаем, что справедливо следующее свойство:

$$\eta_{\kappa_j} \in \mathbb{Z}_{\kappa_j}^{(l)} \quad \forall l \in \overline{1, n} \quad \forall j \in \overline{1, n}. \quad (7.38)$$

Из (7.11) и (7.38) получаем, что $\eta_x \in \mathbb{Z}_x^{(l)} \quad \forall l \in \overline{1, n} \quad \forall x \in \mathbb{K}$. С учетом (7.33) получаем теперь, что

$$\eta_x \in \mathbb{Z}_x^{(l)} \quad \forall l \in \overline{1, n} \quad \forall x \in X. \quad (7.39)$$

Теперь согласно (7.26) и (7.39) имеем $(\eta_x)_{x \in X} \in \mathcal{Z}_l \quad \forall l \in \overline{1, n}$. Как следствие получаем, что

$$(\eta_x)_{x \in X} \in \bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l. \quad (7.40)$$

Напомним, что согласно (7.27) справедливо следующее свойство:

$$\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l \subset \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x].$$

Иными словами, получаем (см. (7.40)), что имеет место

$$\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l \in \mathcal{P} \left(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x] \right) : (\eta_x)_{x \in X} \in \bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l. \quad (7.41)$$

Теперь выберем произвольно отображение

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l. \quad (7.42)$$

Итак, $(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathcal{Z}_l \quad \forall l \in \overline{1, n}$. Из (7.26) получаем, что $\forall l \in \overline{1, n}$

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{Z}_x^{(l)}.$$

Иными словами, реализуется следующее очевидное свойство:

$$\lambda_x \in \mathbb{Z}_x^{(l)} \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}} \quad \forall x \in X. \quad (7.43)$$

Заметим, что (см. (7.26), (7.42)) справедливо, в частности, включение

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))^X.$$

Из (7.27) и (7.42) получаем также, что

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x]. \quad (7.44)$$

В свою очередь, из (7.44) следует, что реализуется система включений

$$\lambda_x \in \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0 [E_x] \quad \forall x \in X. \quad (7.45)$$

Поэтому из (7.7) и (7.45) вытекает, что

$$\lambda_x \in \mathbb{B}_x \quad \forall x \in X \setminus \mathbb{K}. \quad (7.46)$$

Пусть теперь $\nu \in \overline{1, n}$. Тогда в силу (7.11) $x_\nu \in \mathbb{K}$. Из (7.12) получаем, в частности, что

$$\mathbb{H}_{\kappa_\nu} \subset \mathbb{B}_{\kappa_\nu}. \quad (7.47)$$

Напомним также, что $\mathcal{K}_\nu \in \text{Fin}(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_\nu}; \mathcal{L}_{\kappa_\nu}])$ реализует следующее равенство:

$$\mathbb{H}_{\kappa_\nu} = \bigcap_{S \in \mathcal{K}_\nu} S. \quad (7.48)$$

В частности, $\mathcal{K}_\nu \subset \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_\nu}; \mathcal{L}_{\kappa_\nu}]$. Напомним, что согласно (7.43) для $\kappa_\nu \in X$ имеем свойство

$$\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{Z}_{\kappa_\nu}^{(l)} \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}. \quad (7.49)$$

Выберем произвольно $\mathbb{D} \in \mathcal{K}_\nu$, получая множество из $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_\nu}; \mathcal{L}_{\kappa_\nu}]$:

$$\mathbb{D} \in \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E_{\kappa_\nu}; \mathcal{L}_{\kappa_\nu}].$$

Заметим, что согласно (7.18) реализуется следующее свойство:

$$Z_l(\nu) \in \mathcal{K}_\nu \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}.$$

Из (7.23) имеем, в частности, очевидную систему равенств

$$\mathbb{Z}_{\kappa_\nu}^{(l)} = Z_l(\nu) \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}.$$

При этом $Z_1 \in \mathbf{K}$. Тогда имеем по определению $\mathbf{K}$, поскольку (см. (7.16))

$$\mathbf{K} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^n,$$

что $Z_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))^n$. Иными словами, реализуется отображение

$$Z_1 : \overline{1, n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))).$$

При этом, конечно, $Z_1 \in \prod_{i=1}^n \mathcal{K}_i$, а потому $Z_1(j) \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in \overline{1, n}$. Введем в рассмотрение отображение (кортеж)

$$\tilde{Z} : \overline{1, n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E}))) \quad (7.50)$$

посредством следующего правила:

$$(\tilde{Z}(j) \triangleq Z_1(j) \quad \forall j \in \overline{1, n} \setminus \{\nu\}) \& (\tilde{Z}(\nu) \triangleq \mathbb{D}) \quad (7.51)$$

(согласно (7.15) $\mathcal{K}_\nu \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$ и $\mathbb{D} \in \mathcal{K}_\nu$). При этом (см. (7.18))

$$(\tilde{Z}(j) = Z_1(j) \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in \overline{1, n} \setminus \{\nu\}) \& (\tilde{Z}(\nu) = \mathbb{D} \in \mathcal{K}_\nu).$$

Иными словами, имеем систему включений $\tilde{Z}(j) \in \mathcal{K}_j \quad \forall j \in \overline{1, n}$. Тогда $\tilde{Z} \in \prod_{j=1}^n \mathcal{K}_j$, а потому

$$\tilde{Z} \in \mathbf{K}. \quad (7.52)$$

Из (7.17) и (7.52) следует, что для некоторого $\zeta \in \overline{1, n}$ имеет место равенство $\tilde{Z} = Z_\zeta$. С учетом (7.51) получаем, как следствие, что

$$(Z_\zeta(j) = Z_1(j) \quad \forall j \in \overline{1, n} \setminus \{\nu\}) \& (Z_\zeta(\nu) = \mathbb{D}). \quad (7.53)$$

При этом (см. (7.50)), конечно, $Z_\zeta : \overline{1, n} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{E})))$. В силу (7.49)

$$\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{Z}_{\kappa_\nu}^{(\zeta)}. \quad (7.54)$$

Однако в силу (7.23) имеем равенство $\mathbb{Z}_{\kappa_\nu}^{(\zeta)} = Z_\zeta(\nu)$, а потому (см. (7.54)) $\lambda_{\kappa_\nu} \in Z_\zeta(\nu)$. С учетом (7.53) получаем, что $\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{D}$. Поскольку выбор $\mathbb{D}$ был произвольным, установлено свойство

$$\lambda_{\kappa_\nu} \in S \quad \forall S \in \mathcal{K}_\nu. \quad (7.55)$$

С учетом (7.48) и (7.55) получаем теперь очевидное включение

$$\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{H}_{\kappa_\nu}. \quad (7.56)$$

Из (7.47) и (7.56) вытекает, что $\lambda_{\kappa_\nu} \in \mathbb{B}_{\kappa_\nu}$. Поскольку ν выбиралось произвольно, установлено, что $\lambda_{\kappa_j} \in \mathbb{B}_{\kappa_j} \quad \forall j \in \overline{1, n}$. С учетом (7.11) получаем теперь, что

$$\lambda_x \in \mathbb{B}_x \quad \forall x \in \mathbb{K}. \quad (7.57)$$

Из (7.46) и (7.57) вытекает, что справедливо следующее свойство:

$$\lambda_x \in \mathbb{B}_x \quad \forall x \in X.$$

Тогда имеем включение $(\lambda_x)_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathbb{B}_x$, а потому (см. (7.5))

$$(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathbf{B}. \quad (7.58)$$

Из (7.4) и (7.58) следует теперь очевидное включение $(\lambda_x)_{x \in X} \in \mathbb{G}$. Итак, получили (см. (7.42)) свойство

$$\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l \subset \mathbb{G}. \quad (7.59)$$

Таким образом (см. (7.31), (7.41), (7.59)), установлено, что

$$\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l \in \mathcal{P}\left(\prod_{x \in X} \langle \mathcal{L}_x - \text{link} \rangle_0[E_x]\right) : ((\eta_x)_{x \in X} \in \bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l) \& (\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l \subset \mathbb{G}). \quad (7.60)$$

Заметим теперь, что из (7.1) и (7.60) вытекает, что

$$\mathbf{g}^1\left(\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l\right) \subset \mathbf{g}^1(\mathbb{G}). \quad (7.61)$$

При этом, как видно из (7.60), $\mathbf{g}((\eta_x)_{x \in X}) \in \mathbf{g}^1(\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l)$, а тогда согласно (7.2) имеем

$$\mathcal{E} \in \mathbf{g}^1\left(\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l\right). \quad (7.62)$$

Отметим, что согласно (7.31) и предложению 6.5 реализуется свойство

$$\mathbf{g}^1(\mathcal{Z}_l) \in \hat{\mathcal{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x] \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}. \quad (7.63)$$

Поскольку согласно предложению 6.4 отображение $\mathbf{g}$ является биекцией, то

$$\mathbf{g}^1\left(\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l\right) = \bigcap_{l=1}^n \mathbf{g}^1(\mathcal{Z}_l). \quad (7.64)$$

Между тем справедливо (см. (3.3), (6.1)) следующее очевидное свойство:

$$\hat{\mathcal{C}}_0^*[\mathbb{E}; \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x] \subset \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle.$$

Поэтому имеем (см. (7.63)) следующие включения

$$\mathbf{g}^1(\mathcal{Z}_l) \in \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle \quad \forall l \in \overline{1, \mathbf{n}}, \quad (7.65)$$

где $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$. Поэтому (см. (7.65), аксиомы топологии) имеет место включение

$$\bigcap_{l=1}^n \mathbf{g}^1(\mathcal{Z}_l) \in \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle,$$

а тогда (см. (7.62), (7.64)) реализуется следующее свойство

$$\mathbf{g}^1\left(\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l\right) \in \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle : \mathcal{E} \in \mathbf{g}^1\left(\bigcap_{l=1}^n \mathcal{Z}_l\right).$$

Итак, множество (7.64) есть открытая окрестность точки $\mathcal{E}$. В этом случае (см. (7.61)) $\mathbf{g}^1(\mathbb{G})$ есть окрестность $\mathcal{E}$ в смысле [23, гл. I]. Поскольку выбор $\mathcal{E}$ был произвольным, установлено, что множество $\mathbf{g}^1(\mathbb{G})$ является окрестностью каждой своей точки (точнее, окрестностью в смысле [23, гл. I]), а потому

$$\mathbf{g}^1(\mathbb{G}) \in \mathbb{T}_* \langle \mathbb{E} \mid \bigotimes_{x \in X} \mathcal{L}_x \rangle \quad (7.66)$$

согласно [23, гл. I, § 1, предложение 1]. Поскольку $\mathbb{G} \in \mathbf{t}_\otimes$ выбиралось произвольно, имеем из (7.66) требуемое свойство: $\mathbf{g}$ — открытое в смысле ТП (6.41) и (6.50) отображение. $\square$

Теорема 7.1. *Отображение $\mathbf{g}$ (6.16) есть гомеоморфизм ТП (6.41) на ТП (6.50).*

Доказательство очевидно: в силу предложений 6.4 и 7.1 отображение $\mathbf{g}$ есть открытая биекция ТП (6.41) на ТП (6.50), а тогда $\mathbf{g}$ есть (см. [24, предложение 3.12]) гомеоморфизм для упомянутых ТП. Итак, ТП (6.41) и (6.50) гомеоморфны. $\square$

References

- [1] А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, *Теория случайных процессов*, Физматлит, М., 2005, 402 с. [A. V. Bulinskiy, A. N. Shiryaev, *Theory of Stochastic Processes*, Fizmatlit, M., 2005 (In Russian), 402 pp.]
- [2] J. de Groot, “Superextensions and supercompactness”, *Extension Theory of Topological Structures and its Applications*, I International Symposium “Extension Theory of Topological Structures and its Applications” (Berlin, 1969), Proceedings of the Symposium, VEB Deutscher Verlag Wis., Berlin, 1969, 89–90.
- [3] J. van Mill, “Supercompactness and Wallman spaces”, *Mathematical Centre Tracts*. V.85, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977, 238 pp.
- [4] M. Strok, A. Szymanski, “Compact metric spaces have binary subbases”, *Fund. Math.*, **89**:1 (1975), 81–91.
- [5] В. В. Федорчук, В. В. Филиппов, *Общая топология. Основные конструкции*, Физматлит, М., 2006, 336 с. [V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov, *General Topology. Basic Constructions*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russian), 336 pp.]
- [6] А. В. Архангельский, “Компактность”, *Общая топология – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **50**, ВИНТИ, М., 1989, 5–128. [A. V. Arkhangel’skii, “Compactness”, *General Topology – 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., **50**, VINITI, Moscow, 1989, 5–128 (In Russian)].
- [7] А. Г. Ченцов, “Суперрасширение как битопологическое пространство”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **49** (2017), 55–79. [A. G. Chentsov, “Superextension as bitopological space”, *Izv. IMI UdGU*, **49** (2017), 55–79 (In Russian)].
- [8] А. Г. Ченцов, “Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем”, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 257–272; англ. пер.: A. G. Chentsov, “Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S24–S39.
- [9] А. Г. Ченцов, “Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 240–257. [A. G. Chentsov, “Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **25**, 2019, 240–257 (In Russian)].
- [10] А. Г. Ченцов, “Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы множеств”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **27**:3 (2017), 365–388. [A. G. Chentsov, “Ultrafilters and maximal linked systems”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27**:3 (2017), 365–388 (In Russian)].
- [11] А. Г. Ченцов, “Некоторые топологические свойства пространства максимальных сцепленных систем с топологией воlmэновского типа”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **56** (2020), 122–137. [A. G. Chentsov, “Some topological properties of the space of maximal linked systems with topology of Wallman type”, *Izv. IMI UdGU*, **56** (2020), 122–137 (In Russian)].
- [12] А. Г. Ченцов, “К вопросу о некоторых обобщениях свойств сцепленности семейств множеств и суперкомпактности топологических пространств”, *Изв. вузов. Матем.*, 2020, № 11, 65–80. [A. G. Chentsov, “To question on some generalizations of properties of cohesion of families of sets and supercompactness of topological spaces”, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 2020, № 11, 65–80 (In Russian)].
- [13] Ж. Неве, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969, 309 с. [J. Neve, *Mathematical Foundations of Probability Theory*, Mir Publ., Moscow, 1969 (In Russian), 309 pp.]
- [14] А. Г. Ченцов, “Максимальные сцепленные системы на семействах измеримых прямоугольников”, *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:133 (2021), 77–104. [A. G. Chentsov, “Maximal linked systems on families of measurable rectangles”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:133 (2021), 77–104 (In Russian)].

- [15] А. Г. Ченцов, “Фильтры и сцепленные семейства множеств”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **30**:3 (2020), 444–467. [A. G. Chentsov, “Filters and linked families of sets”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **30**:3 (2020), 444–467 (In Russian)].
- [16] А. Г. Ченцов, “О суперкомпактности пространства ультрафильтров с топологией воlmэнковского типа”, *Изв. ИМИ УдГУ*, **54** (2019), 74–101. [A. G. Chentsov, “On the supercompactness of ultrafilter space with the topology of Wallman type”, *Izv. IMI UdGU*, **54** (2019), 74–101 (In Russian)].
- [17] К. Куратовский, А. Мостовский, *Теория множеств*, Мир, М., 1970, 416 с. [K. Kuratovsky, A. Mostovsky, *Set Theory*, Mir Publ., Moscow, 1970 (In Russian), 416 pp.]
- [18] А. Г. Ченцов, “К вопросу о представлении ультрафильтров в произведении измеримых пространств”, Тр. ИММ УрО РАН, **19**, 2013, 307–319; англ. пер.: A. G. Chentsov, “On the question of representation of ultrafilters in a product of measurable spaces”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **284**:suppl. 1 (2014), 65–78.
- [19] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981, 431 с. [J. L. Kelly, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1981 (In Russian), 431 pp.]
- [20] А. Г. Ченцов, “Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы”, Тр. ИММ УрО РАН, **26**, 2020, 274–292. [A. G. Chentsov, “Ultrafilters and maximal linked systems”, *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **26**, 2020, 274–292 (In Russian)].
- [21] Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 751 с. [R. Engelking, *General Topology*, Mir Publ., Moscow, 1986 (In Russian), 751 pp.]
- [22] А. Г. Ченцов, *Элементы конечно-аддитивной теории меры, I*, Уральский государственный технический университет – УПИ, Екатеринбург, 2008, 388 с. [A. G. Chentsov, *Elements of Finitely Additive Measure Theory, I*, Ural State Technical University - UPI, Yekaterinburg, 2008 (In Russian), 388 pp.]
- [23] Н. Бурбаки, *Общая топология. Основные структуры*, Наука, М., 1968, 272 с. [N. Burbaki, *General Topology. Basic Structures*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russian), 272 pp.]
- [24] Р. А. Александрия, Э. А. Мирзаханян, *Общая топология*, Высшая школа, М., 1979, 336 с. [R. A. Alexandryan, E. A. Mirzakhanyan, *General Topology*, High School Publ., Moscow, 1979 (In Russian), 336 pp.]

Информация об авторе

Ченцов Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН; профессор, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Российская Федерация. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Information about the author

Aleksandr G. Chentsov, Doctor of Physics and Mathematics, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences; Professor, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russian Federation. E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 24.02.2021 г.

Поступила после рецензирования 20.04.2021 г.

Принята к публикации 10.06.2021 г.

Received 24.02.2021

Reviewed 20.04.2021

Accepted for press 10.06.2021